Сегодня мы получим 4-скорость и 4-силу, а также матрицу э/м поля.

Подход тяп-ляп: да чего думать, сейчас сварганим 4-вектор со скоростью! Возьмём в неё 3-вектор **v**, и какой-то ещё скаляр надо. С координатами у нас было время, скорость – это производная координат, ну и для 4-вектора время подойдёт. {t, **v**}- готово!

Попытка проваливается, потому что любой 4-вектор должен подчиняться преобразованиям Лоренца при переходе в другую СК. Если бы {t, **v**}был бы 4-вектором, то преобразования скорости были также линейными. Однако такого не происходит – они, как вы помните, они нелинейны.

Ну, наверное, эти формулы написали глупые преподаватели с общефиза, которые ошиблись; на самом деле формулы линейные. Но нет, они и вправду такие плохие. Просто потому, что вы диффренцируете всё по времени, а оно разное в разных СК (по сути вы дифференцируете 4-вектор по первой из четырёх из его компонент). Надо дифференцировать не по времени, а по… кое-чему другому. Инвариантному.

Вспомним 4-радиус-вектор-время: {ct, **r**} или {t, **r**/c}. Возьмём последнюю из двух возможных записей и вычислим инвариант этого 4-вектора, вычислив ПКН. Получим t^2-r^2/c^2. И возьмём квадратный корень.

Тут, правда, надо позаботиться о том, чтобы он извлекался. Впрочем, мы всегда можем сдвинуть начало отчёта времени так, чтобы корень извлекался.

$$\text{т} = \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}$$

Полученную величину будем обозначать русской буквой «т» и назовём ***новым (или инвариантным) временем***, а время, которое t – ***старое время***.

Замечание. Новое время очень похоже на время с учётом запаздывания, которое было у нас в прошлых методичках - $\tau = t - \frac{r}{c}$. Однако $t - \frac{r}{c} \neq \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}$! Не путайте их. Во-первых, τ первого порядка малости по отношению к β, т – второго. Во-вторых, мы сейчас работаем ***без учёта эффектов запаздывания***, т.е. считаем, что вся информация в одной СК передаётся мгновенно. ***Эффекты запаздывания накладываются на СТО, а не «включены» в неё!***

Автор это подчёркивает, потому что существует куча псевдопособий по СТО, где говорится об относительности одновременности не в контексте сжатия времени-пространства, а в контексте конечности скорости распространения информации (одна из таких книжек была у автора в 8 классе, он тогда, наивный, думал, что понял СТО). Относительность одновременности, связанная с конечностью скорости распространения информации, существует и без СТО. Вот мы едем в поезде по прямой, на расстоянии 1 км позади нас по путям произошла вспышка и на расстоянии 1 км впереди нас произошла вспышка. Наблюдатель на земле увидит эти вспышки одновременно, а человек на поезде увидит вспышку впереди чуть раньше, чем сзади из-за конечности скорости света. Вот вам и относительность одновременности. Никакого сжатия времени или пространства тут нет, это в состоянии понять и восьмиклассник. Все эти россказни не имеют никакого отношения к СТО. Так что мы исследуем именно явления, связанные с искажением пространства-времени, а не распространением информации во Вселенной.

Новое время – инвариант всех инерциальных СК! Ну, не совсем инвариант из-за того, что мы можем взять 0 времени и 0 СК где нам угодно. Но если два наблюдателя в разных СК их синхронизуют по какому-то объекту, то для всех остальных объектов Вселенной новое время будет уже инвариантом. Раз новое время – инвариант, то мы можем спокойно по нему дифференцировать.

Теорема. Производная любого 4-вектора по инвариантному скаляру есть также 4-вектор.

Док-во. 4-вектор – это всё, что удовлетворяет преобразованиям Лоренца. Т.к. они линейны, а сумма производных – производная сумма, то благодаря тому, что мы дифференцируем по инварианту, новая хрень из 4 компонент также будет 4-вектором.

Итак, 4-вектор:

$$\underset{\rightarrow}{V} = \left\{ \frac{\partial ct}{\partial \tau}, \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right\} = \left\{ c\frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{z}}{\partial \tau} \right\}$$

Знак вектора внизу подчёркивает, что это именно 4-вектор. В первой методичке я снизу просто подчёркивал, т.к. там формулы были именно печатные.

Все 4-векторы до этого были у нас слепленные из одного скаляра из нашего 3-пространства и одного вектора оттуда же. Т.е. и первая компонента из четырёх 4-вектора, и последние три имели физический смысл. Здесь иначе: ни одна из компонент напрямую физического смысла не имеет. И, как мы

видим, последние три компоненты НЕ являются компонентами привычной скорости $\{v_x, v_y, v_z\}$, так как в привычной 3-скорости производные по старому времени, а в 4-скорости – по новому времени.
Запишем ещё заодно 4-ускорение сразу:

$$\underrightarrow{a} = \left\{c\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}; \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \tau^2}\right\}$$

А как нам от 4-скорости перейти к обычной 3-скорости? Просто взять последние три компоненты не получится.
Надо вспомнить правило дифференцирования сложной функции многих переменных из 2 семестра. Чтобы продифференцировать величину u по новому времени, нужно вспомнить правило из матана-2:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \ldots + \ldots$$

Полный вывод я опущу, он уже был проделан многократно всеми на свете (и обшефизом в том числе), и были получены те самые противные нелинейные формулы.

А ещё на общефизе вам 100% давали формулу $p=\gamma mv$. Так вот, если здесь p и v – это 3-векторы, то это правда. А вот если мы хотим связать 4-импульс и 4-скорость, то формула будет как в 9 классе: $\underline{\mathbf{p}}=m\underline{\mathbf{v}}$.
Дело в том, что 4-скорость (как и 4-ускорение) – необычный 4-вектор. Если последние 3 компоненты 4-импульса – это 3-импульс, 4-э/м потенциала – это **A** (т.е. последние три компоненты 4-вектора обычно имеют свой физический смысл), то вот последние 3 компоненты 4-скорости – это 3-скорость, ***но домноженная на γ.*** Т.е. лямбда как бы «вшита» в определение 4-скорости. Так что никакого противоречия нет.

Ещё очень советую посмотреть видео Побединского https://www.youtube.com/watch?v=TuEZgMf7rKI (и это единственное научпопное видео по СТО, которое я могу порекомендовать – к сожалению, по СТО есть 100500 видео, создающих лишь ***видимость*** понимания). У него, правда, всё перепутано: чем больше пространственная скорость, тем больше и временная (а не наоборот), но идея верна.

Последнее замечание: поделим 4-вектор скорости на c, и получим 4-вектор беты:

$$\underset{\to}{\beta} = \left\{ \frac{\partial t}{\partial \tau}; \frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial \tau} \right\}$$

Он нам потребуется в дальнейшем для вычисления силы Лоренца.

Теперь получим 4-силу. Для этого надо продиффренцировать по времени 4-импульс. Естественно, по новому времени:

$$\underset{\to}{F} = \frac{\partial \underset{\to}{p}}{\partial \tau} = \left\{ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial W}{\partial \tau}; \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\}$$

Как мы знаем, при малых скоростях энергия – это $mv^2/2$, которая делится ещё на с. Поэтому при малых скоростях мы этой четвёртой компоненты и не чувствуем.

Теперь давайте про **E** и **H**. В 4-вектор они не поместятся (шесть компонент, а мест всего 4), пытаемся запихнуть в 4-матрицу, там мест аж 16.

Спойлер: в матрицу запихивается. Правда, если вы пойдёте гуглить, вы найдёте ***три*** матрицы э/м поля. Различаются они индексами:

$?^{ik}$ – два верхних

$?^{i}_{k}$ – верхний и нижний

$?_{ik}$ – два нижних

И они разные! Вот, смотрите:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Нам пока хватит одной – с одним верхним и нижним индексом. Её и будем использовать во всех дальнейших формулах методички. ***До СТО7 считайте, что других матриц нет, только эта:***

$$F^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Давайте, посмотрим, как эта матрица применяется и какой у неё физический смысл. Разберём два уравнения:

Уравнение, связывающее E и H с φ и A

В 3D это два уравнения:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \end{cases}$$

Если 4-градиент ввести можно, то 4-ротора не существует.

ij-тая компонента матрицы э/м поля получается как

$$Щ^i_j = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

(Я буду обозначать матрицу э/м поля как «Щ» или «Ш», а не «F», чтобы не путать с силой).

Правило этого матричного оператора:

Хочешь получить i,j-тую компоненту? Продифференцируй j-тую компоненту 4-вектора по i-той координате из списка {ct, x, y, z}. Затем продифференцируй i-тую компоненту 4-вектора по x-той координате из списка {ct, x, y, z}. И вычти одно из другого.

То есть если у нас есть 4-вектор $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, то матрица э/м поля

$$\begin{matrix}
\frac{\partial A_0}{\partial r_0} - \frac{\partial r_0}{\partial A_0} & \frac{\partial A_0}{\partial r_1} - \frac{\partial r_1}{\partial A_0} & \frac{\partial A_0}{\partial r_2} - \frac{\partial r_2}{\partial A_0} & \frac{\partial A_0}{\partial r_3} - \frac{\partial r_3}{\partial A_0} \\
\frac{\partial A_1}{\partial r_0} - \frac{\partial r_0}{\partial A_1} & \frac{\partial A_1}{\partial r_1} - \frac{\partial r_1}{\partial A_1} & \frac{\partial A_1}{\partial r_2} - \frac{\partial r_2}{\partial A_1} & \frac{\partial A_1}{\partial r_3} - \frac{\partial r_3}{\partial A_1} \\
\frac{\partial A_2}{\partial r_0} - \frac{\partial r_0}{\partial A_2} & \frac{\partial A_2}{\partial r_1} - \frac{\partial r_1}{\partial A_2} & \frac{\partial A_2}{\partial r_2} - \frac{\partial r_2}{\partial A_2} & \frac{\partial A_2}{\partial r_3} - \frac{\partial r_3}{\partial A_2} \\
\frac{\partial A_3}{\partial r_0} - \frac{\partial r_0}{\partial A_3} & \frac{\partial A_3}{\partial r_1} - \frac{\partial r}{\partial A_3} & \frac{\partial A_3}{\partial r_2} - \frac{\partial r_2}{\partial A_3} & \frac{\partial A_3}{\partial r_3} - \frac{\partial r_3}{\partial A_3}
\end{matrix}$$

Применённый к 4-вектору э/м поля, он имеет вид

$$\begin{matrix}
\frac{\partial \varphi}{\partial ct} - \frac{\partial \varphi}{\partial ct} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial ct} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial ct} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial ct} \\
\frac{\partial A_x}{\partial ct} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\
\frac{\partial A_y}{\partial ct} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \\
\frac{\partial A_z}{\partial ct} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{matrix}$$

Явной подстановкой вы можете убедиться в том, что получится та самая матрица э/м поля, а на диагонали должны стоять нули.

Квадрат 3x3 снизу должен вам напоминать ротор (за исключением диагональных компонент, которые будут нули, остальные – это старые-добрые компоненты 3-ротора), ну а первый столбец и первая строка содержат производные φ по координате – это градиент, тут напряжённость. Так что всё сходится.

Сила Кулона-Лоренца
В 3D:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{[\vec{v} \times \vec{H}]}{c}\right)$$

Или, так нам будет удобнее

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{H}]\right)$$

А в четырёхмерных обозначениях будет

$$\underrightarrow{F} = q\,\underset{\checkmark}{Щ}\,\underrightarrow{\beta}$$

4-матрицу я решил обозначить галочкой снизу. В проекциях это:

$$F^i = q\sum_{k=0}^{3} Щ^i_k \beta^k$$

Вся электродинамика в 4-обозначениях упрощается. Было у нас 4-я ур-я Максвелла для E и H. Мы их заменили на 2 ур-я, выражающие E и H через φ и A, и 2 волновых ур-я для φ и A. Всё равно 4 уравнения.
В 4-обозначениях у нас ***одно уравнение для э/м потенциала***

$$\square \underrightarrow{A} = -4\pi \underrightarrow{j}$$

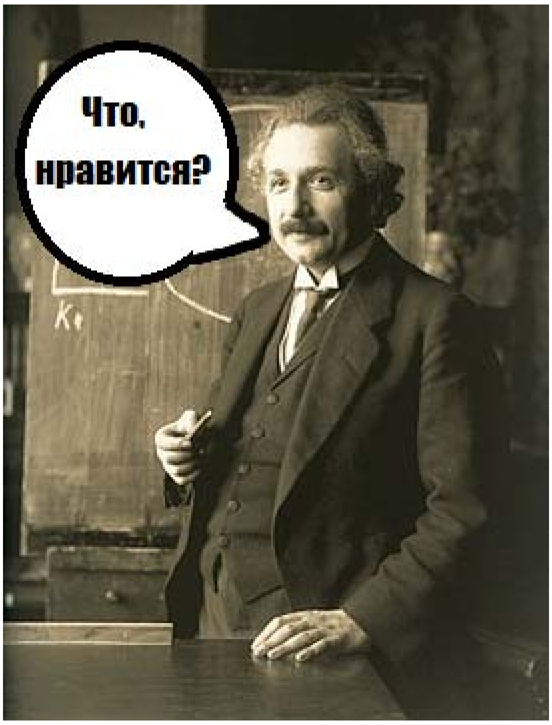
И одно ур-е для э/м поля через потенциалы

$$Щ^i_j = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i}$$

Всего лишь 2 уравнения!

И вместо двух сил – Кулона и Лоренца у нас одна 4-сила:

$$F^i = q\sum_{k=0}^{3} Щ^i_k \beta^k$$



Про неэкономность

Может возникнет ощущение, что мы «неэкономны»: используем 16 компонент, которые раньше помещались в 6 (три у двух векторов). Ответ: теорфизикам плевать на экономность, им главное – тензорность ☺ И это (6 из 16), поверьте, ещё цветочки. Можно вспомнить и огромную любовь теоретиков к дельта-символам Кронекера (https://www.youtube.com/watch?v=PapnBKnPA8s), которые не несут информации вовсе. Ну и в ОТО (общая теория относительности) будут ещё более «неэкономные» тензоры. Например, там есть четырензор Римана там такой R^a_{bcd}. У него 256 компонент, из которых нужны и реально несут уникальную информацию… если я не ошибаюсь, 20. А если у нас сферически-симметричное поле (например, чёрной дыры), то уже не 20, а 5.

Немного о геометрическом смысле матриц (двензоров).

Мы привыкли представлять вектора не только как упорядоченный набор чисел, но и как стрелочку в пространстве. Чем стрелочка в пространстве удобней столбца/строки 1х3 (или 1х4)? Тем, что стрелочка – инвариант СК. Какие мы бы координаты не ввели, как бы мы не вращали оси – три/четыре проекции будут меняться, а стрелочка останется той же. Она – инвариант СК.

Матрицы (хоть 3х3, хоть 4х4) – это тоже представление в данной СК какой-то физической величины, будь то квадрупольный момент или электромагнитное поле, которое является тензором второго ранга. Что такое тензор? Хороший вопрос. Наиболее простое, но не совсем точное определение – это инвариант СК.
Тензор нулевого ранга – инвариантный скаляр
Тензор первого ранга – вектор
Тензор второго ранга - …. Ну… а для него специального названия нет ☺ Но они в данной СК представляются в виде матриц. Например, хрестоматийный тензор инерции.
Тензоры второго ранга я для краткости буду называть «двензоры» ☺
Перейдём в другую СК – матрица будет другой, но двензор как физическая сущность останется та же, просто поменяются его 9 проекций!
В каждой точке Вселенной есть некий э/м потенциал. Это 4-вектор. Он не зависит, как мы возьмём СК – так или этак, но в зависимости от выбора СК у него будут четыре конкретных числа. В каждой точке Вселенной есть э/м поле. Это 4-двензор. Он не зависит сам по себе от того, как мы берём СК – так или этак, но когда мы выберем СК, мы его можем представить в виде матрицы из 16 чисел.

Ну хорошо, вектора мы можем представлять в виде стрелочек. А можно ли так наглядно представлять двензоры?
Если вы вспомните линал, то квадратная матрица там обозначала в т.ч. линейный оператор – правило, по которому одному вектору сопоставляется другой. При этом это правило должно быть линейным.
У нас был 4-вектор **β**, который был там куда-то направлен, а мы на него подействовали матрицей э/м поля, и получили 4-вектор **F**. В принципе 4-вектор **β** – это при малых почти 3-скорость (первая компонента очень мала, а последние три – как раз скорость), а **F** – 3-сила, которая при малых скоростях коллинеарна ускорению. Т.е. в этом случае матрица будет указывать, на какой угол надо повернуть вектор скорости (и на что домножить), чтобы получить ускорение.
Таким образом, физический смысл двензора электромагнитного поля – это линейный оператор поворота (а его матрица – матрица поврота).

А всё-таки, почему матриц э/м поля несколько? Осознание придёт в СТО7. Пока вам хватит одной ☺
Чек-лист. Мы познакомились с:
1) 4-вектором скорости
2) 4-вектором силы
3) 4-двензором э/м поля
4) Записали силу Лоренца через 4-обозначения